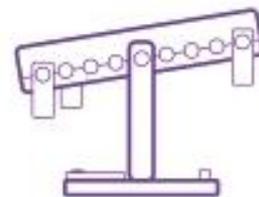


Matemática

Exp[®] M.02

**Balança
Matemática**



**USO PRÁTICO DE UMA
BALANÇA E MASSAS
PARA ESTUDAR ARITMÉTICA.**

Investigação de propriedades matemáticas tais como as 4 operações básicas, equações e inequações de forma observacional, intuitiva e lúdica.



FRACTAL
www.fractal.ind.br

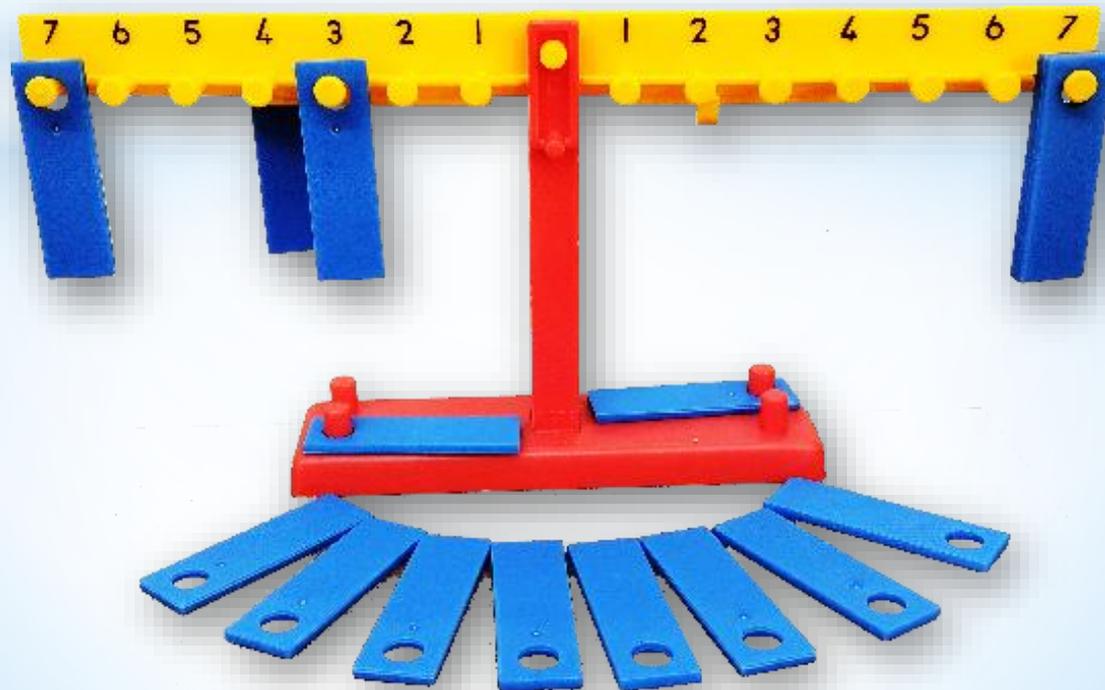


www.fractal.ind.br

contato@fractal.ind.br

Whatsapp 84 99413-0079

Balança Matemática

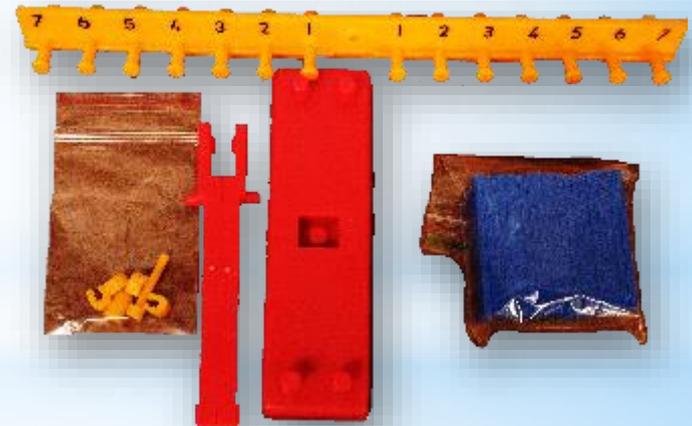
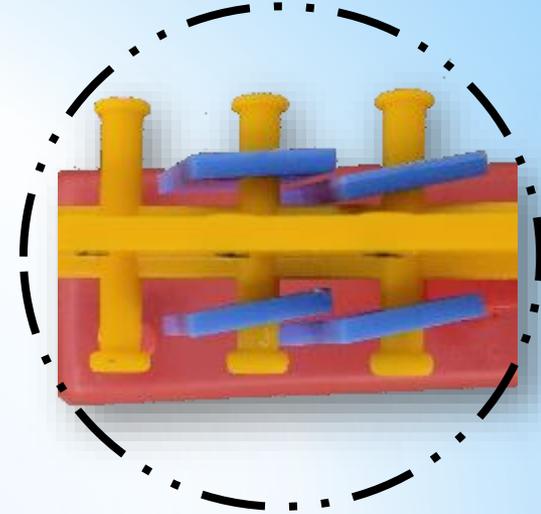


Sobre a Balança Matemática.

- Aqui apresentam-se os princípios de funcionamento da Balança Numérica, uma excelente ferramenta pedagógica para o ensino de relações numéricas (Equações e Inequações) e operações matemáticas tais como adição, subtração e multiplicação. Este instrumento pode ser utilizado para facilitar o entendimento dos alunos, proporcionando aprendizado de forma intuitiva, divertida e interessante. Inicialmente, para entender como funciona a balança, você aprenderá a montar e calibrá-la para uso. Na sequência, você aprenderá a resolver problemas envolvendo as 4 operações aritméticas básicas, além de equações de primeiro grau. Também, você entenderá o que é uma igualdade ou desigualdade. Cada componente da Balança é indicado, bem como sua montagem completa. Na parte final há a explicação física do funcionamento da Balança destinada aos professores.

Material

- Caixote de madeira (22 cm, 17 cm, 7 cm)
- Corpo da Balança:
 - Base.
 - Torre com pinos de encaixe.
 - Braços com casas enumeradas de 1 – 7, frente e costas
- 4 pesos reguladores de massa = Yg para calibração.
- X pesos iguais de massa = 1.9g para a operar a balança:

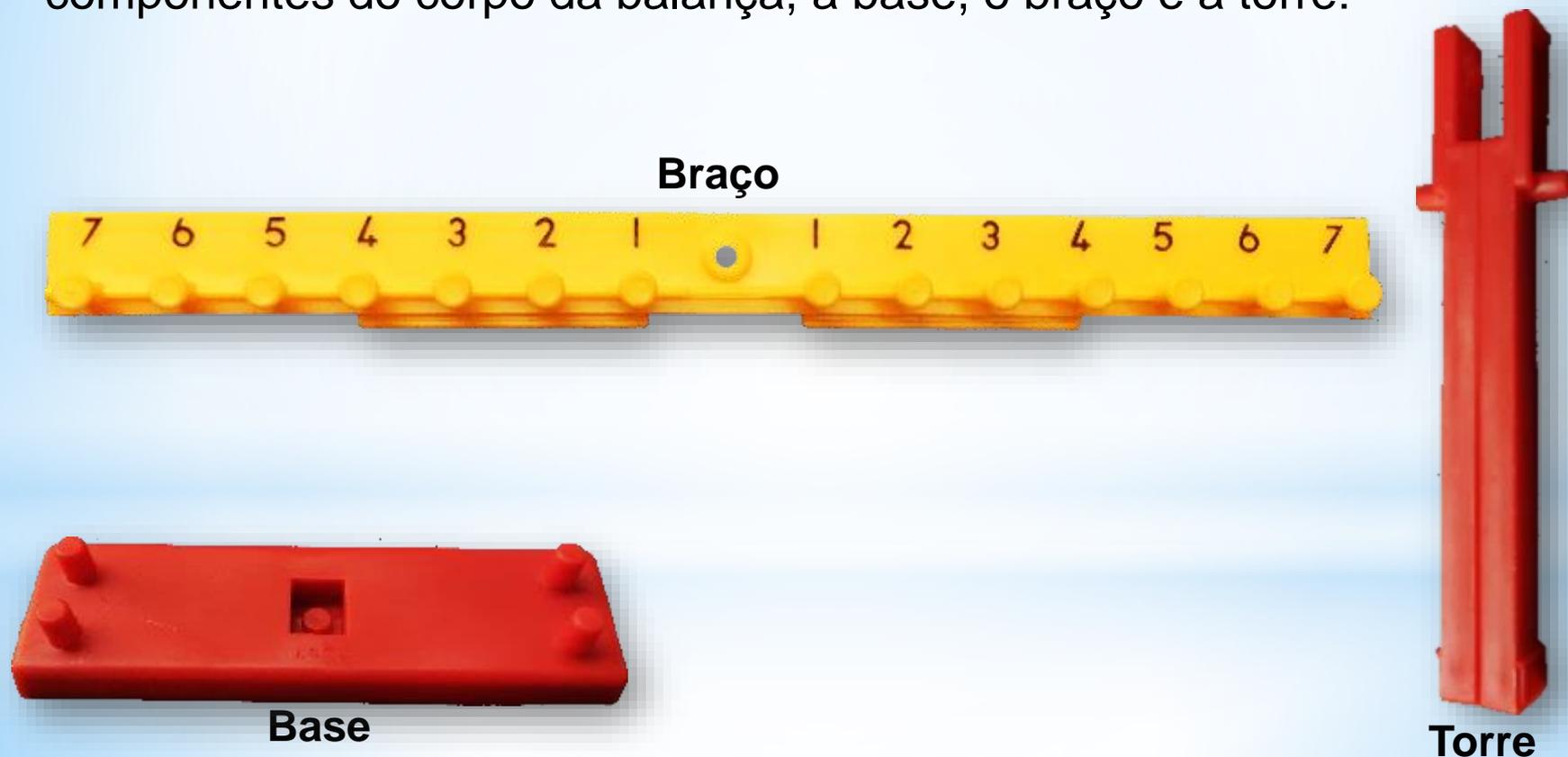


Balança Matemática e seus componentes.

Montagem

Montando a Balança.

- Você aprenderá a preparar a balança para utilização. Retire os componentes da caixa e coloque na bancada ou mesa. Identifique os três componentes do corpo da balança, a base, o braço e a torre:



Os 3 componentes do corpo da Balança Matemática.

Montagem

Montando a Balança.

- O primeiro passo é encaixar a torre na base. Firme a base antes de encaixar para não escapar na hora do encaixe.

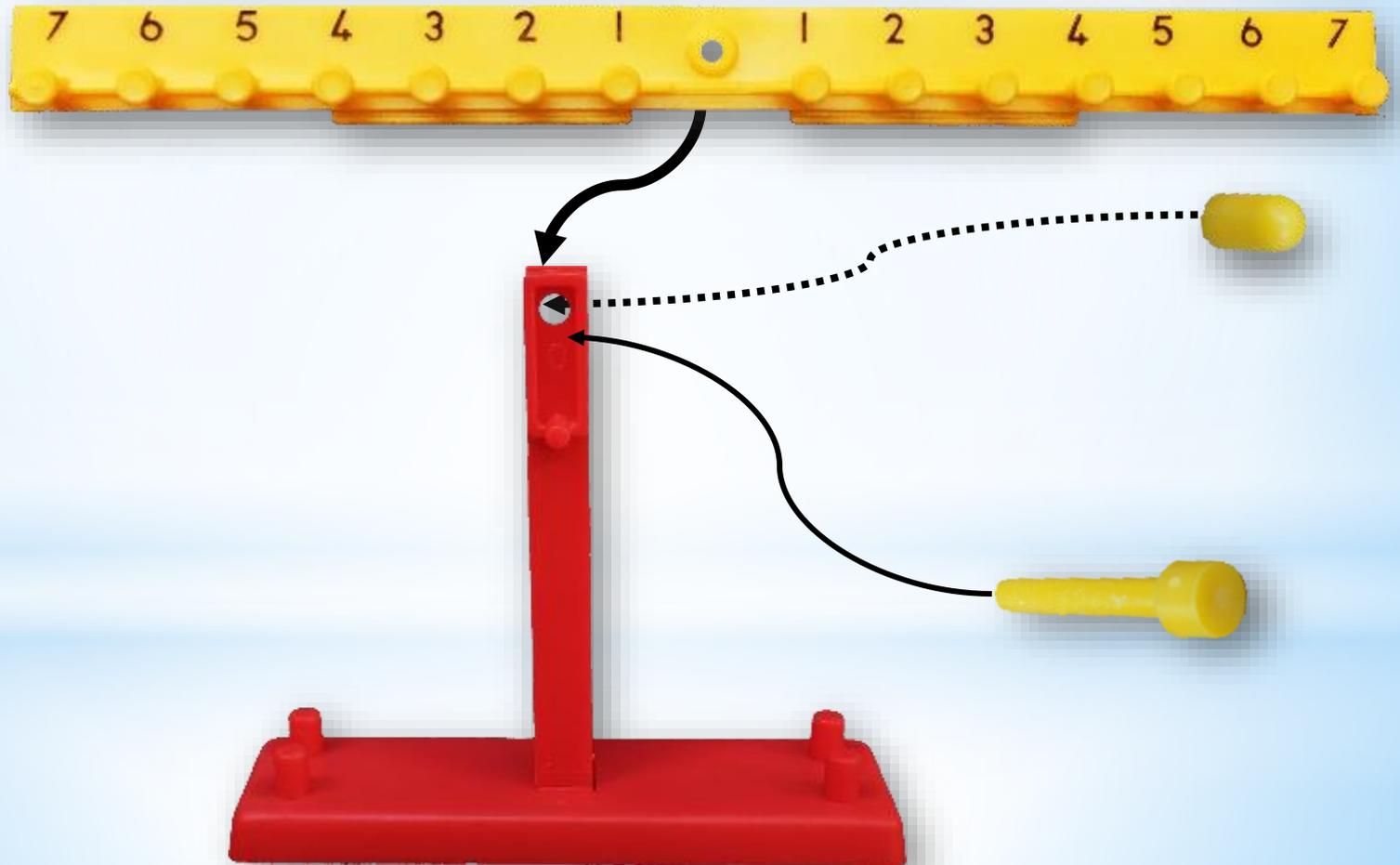


Encaixe da torre na base.

Montagem

Montando a Balança.

- Agora, encaixe o braço na torre para completar a montagem inicial. Basta colocar o braço no espaço do orifício da torre e prender com o pino de encaixe.



Encaixe do braço na torre.

Montagem

Montando a Balança.

- Verifique se o braço da balança permanece horizontal quando sem pesos, conforme a figura.
- Identifique os pesos de ajuste, eles serão usados apenas se a balança não estiver calibrada por algum motivo (danos devido o uso, por exemplo).

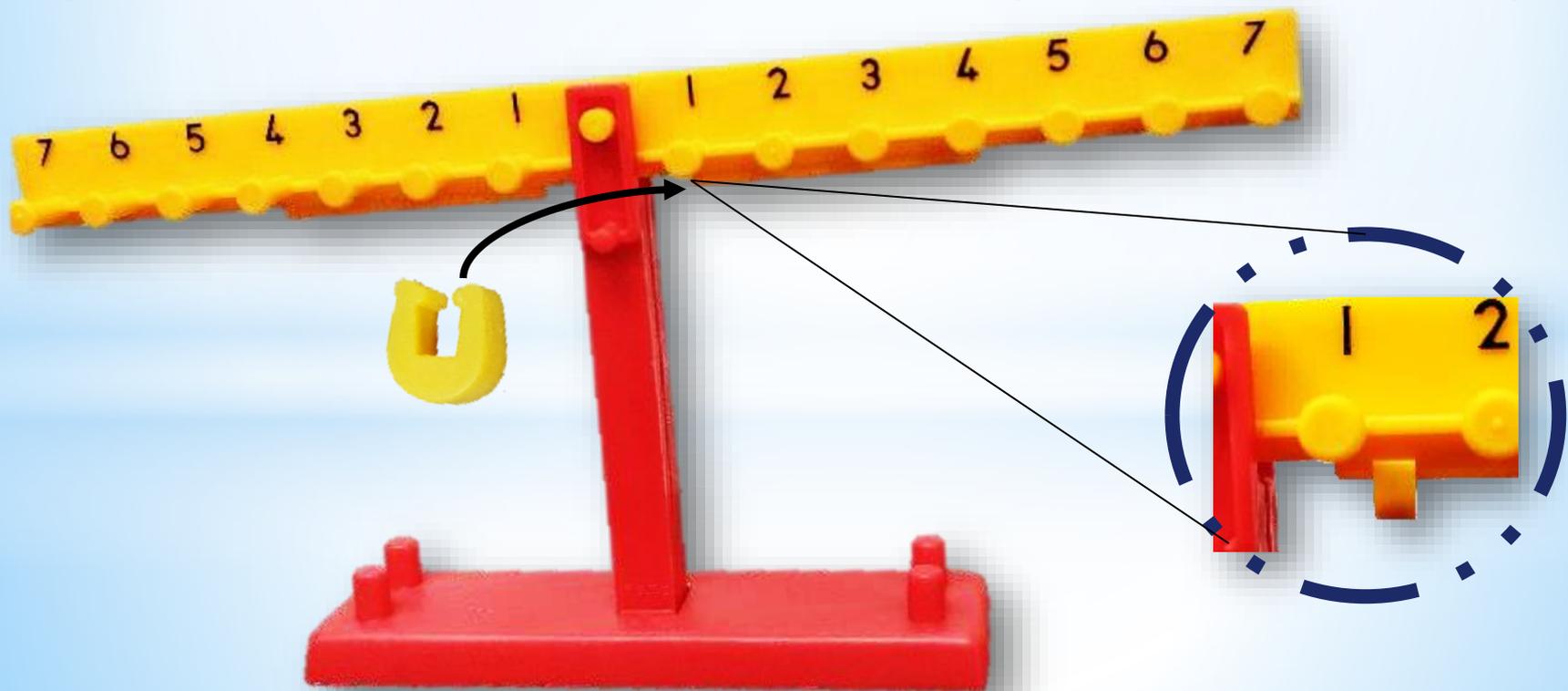


Balança na posição horizontal.

Calibragem

Calibrando da Balança.

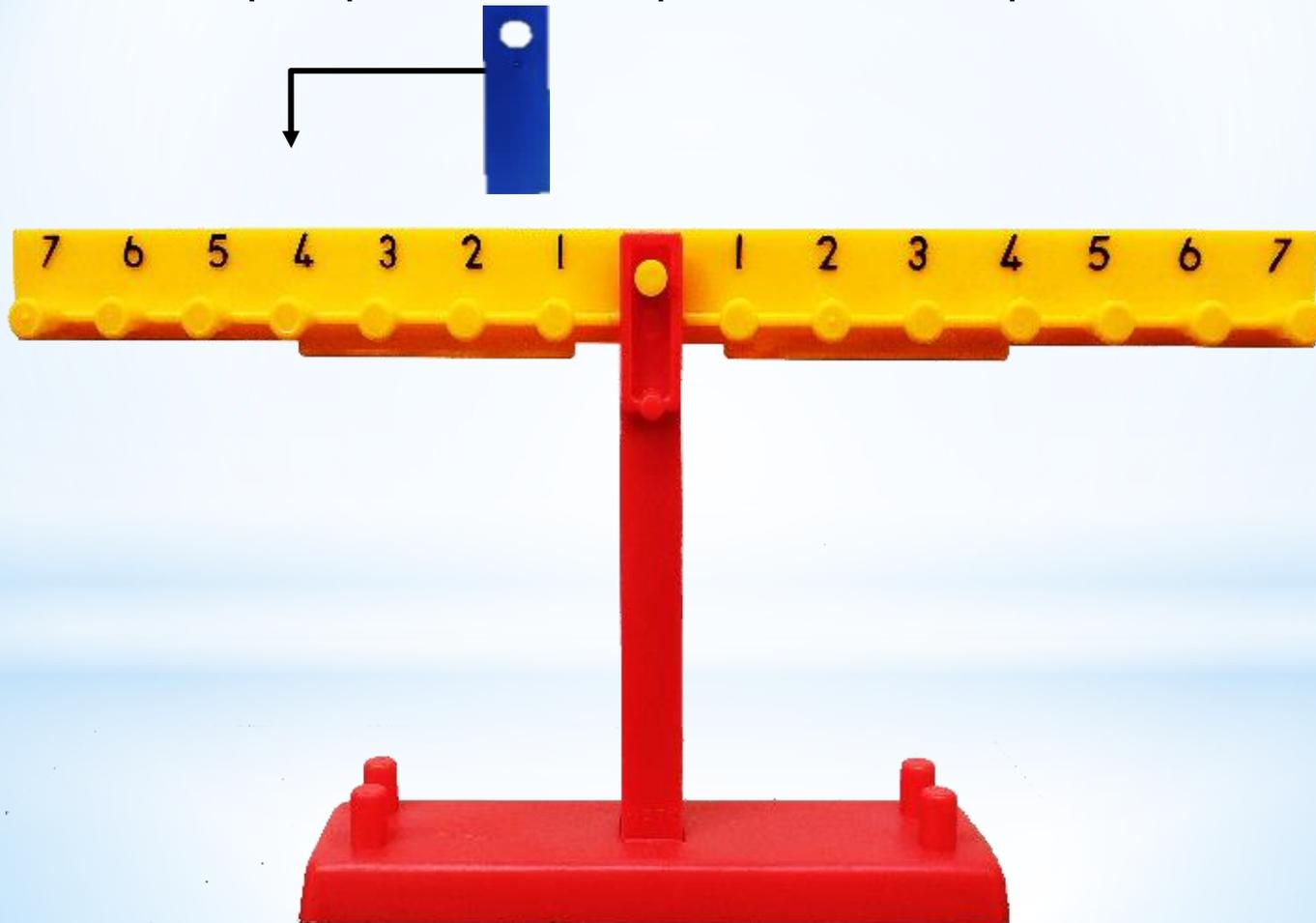
- Caso ela não esteja alinhada você pode calibrá-la utilizando os pesos de ajuste, coloque-os em posições que permitam a balança ficar exatamente horizontal. É indicado colocá-los próximo de centro, para facilitar a calibragem.
- Agora que ela está calibrada, podemos começar a explorar suas funções.



Balança Matemática

Manuseando a balança

- Para começar a se familiarizar com a balança, coloque apenas um peso de um lado, em qualquer casa. O que você acha que ocorrerá?

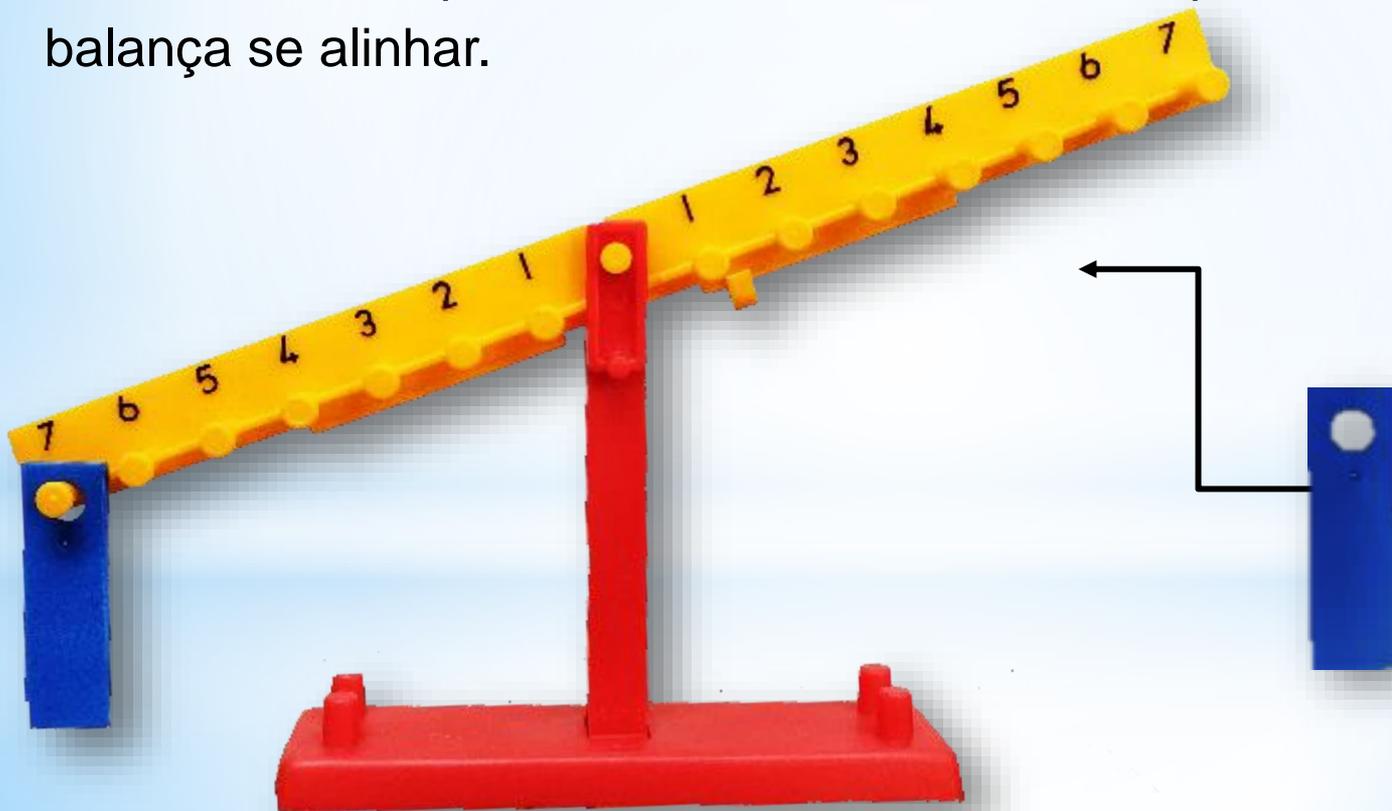


Exemplo

Balança Matemática

Manuseando a balança

- A balança girou para o lado que você colocou o peso. O que isso significa?
- Agora, o que fazer para a balança ficar alinhada novamente?
- Acrescente um peso do outro lado na casa que você acha que fará a balança se alinhar.



Exemplo

Balança Matemática

Manuseando a balança

- Quando você conseguir alinhar a balança, observe o número das casas dos dois lados. Você observa alguma relação entre elas?



Exemplo

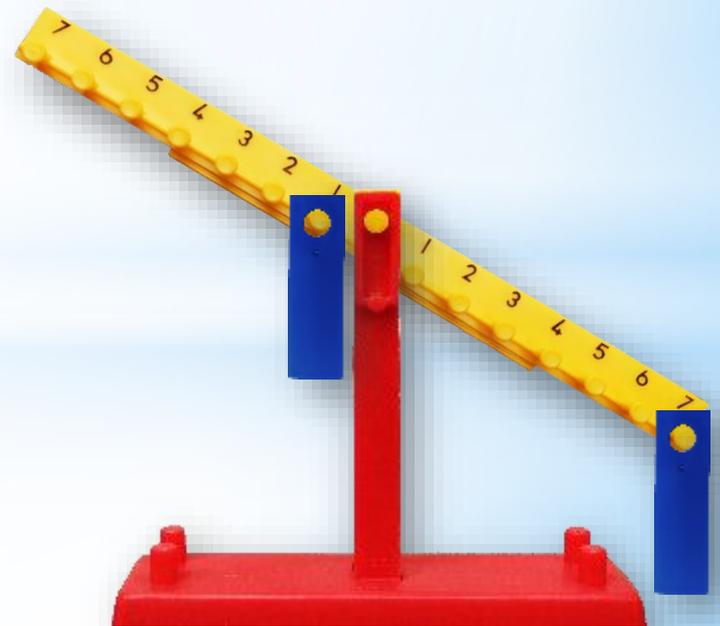
Balança Matemática

Manuseando a balança

- Coloque dois pesos de um lado e apenas um peso do outro lado.
- O que você observa? Atente para os números das casas!
- O que você acredita que ocorre quando um lado fica mais baixo que o outro?
- Qual a relação entre a casa do lado mais baixo e a casa do lado mais alto?



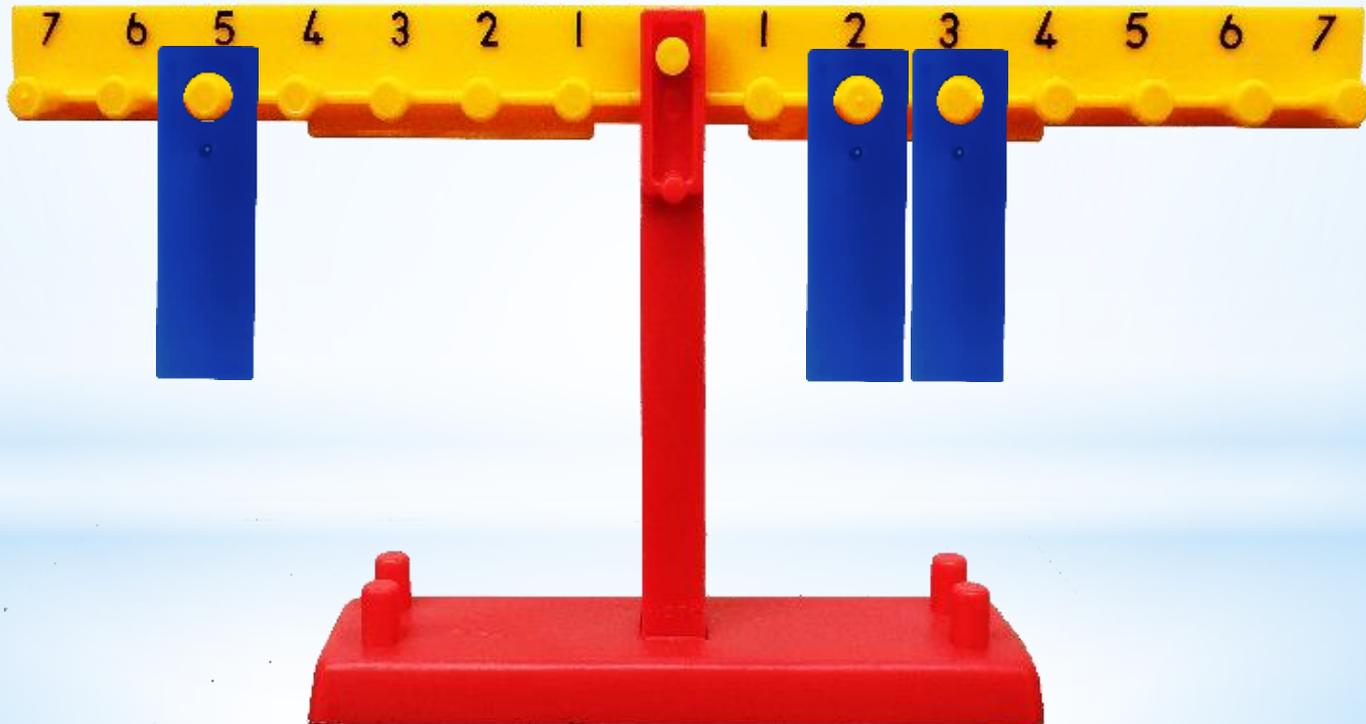
Exemplos



Balança Matemática

Manuseando a balança

- Tente agora adicionar pesos do lado mais alto até equilibrar a balança, você pode fazer por tentativas, a balança deve ficar reta, conforme o exemplo:



Exemplo

Balança Matemática

Manuseando a balança

- Observe os números das casas do exemplo abaixo, você percebe alguma relação entre eles?
- O que ocorre se retirarmos o peso da casa 2?



Exemplo

Balança Matemática

Manuseando a balança

- Agora que você se familiarizou com a balança, você pôde perceber três situações diferentes:
 - Lado esquerdo para baixo, Lado direito para cima;
 - Lado esquerdo para cima, Lado direito para baixo;
 - Ambos os lados alinhados na horizontal
- A forma de utilizar a balança para resolver somas, subtrações e pequenas equações será explicada.

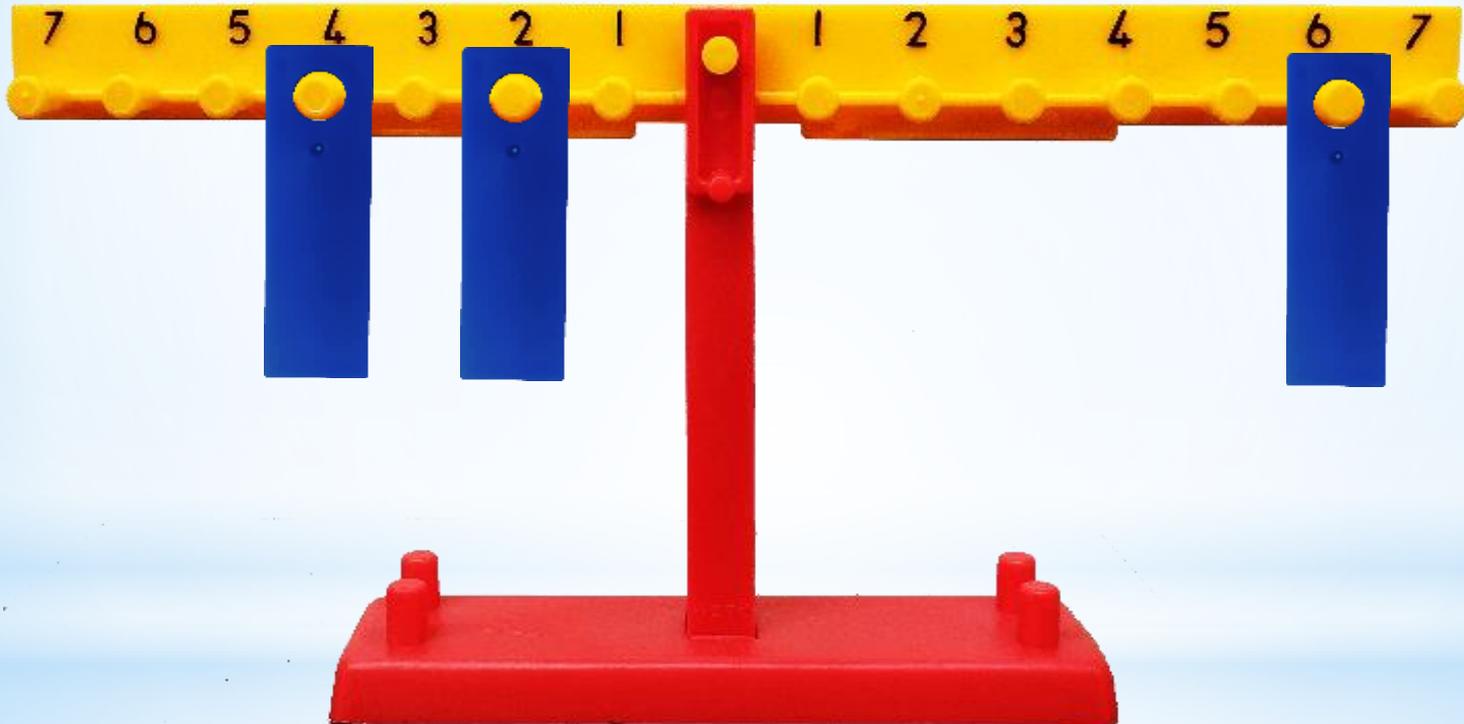
Parte Destinada ao Aluno

***Pode-se retirar os slides de exercícios e colocá-los na parte do professor, junto com a física da balança. Deixando somente as partes mais básicas para o estudante. Quando decidirmos quais slides ficam em cada um aí eu divido em dois arquivos (Compensa separar quanto estiver pronto, para evitar trânsito de dois arquivos)**

Balança Matemática

Igualdade.

- Quando a balança fica alinhada horizontalmente, significa que um lado é equivalente ao outro, ou seja, temos a igualdade entre quantidades.



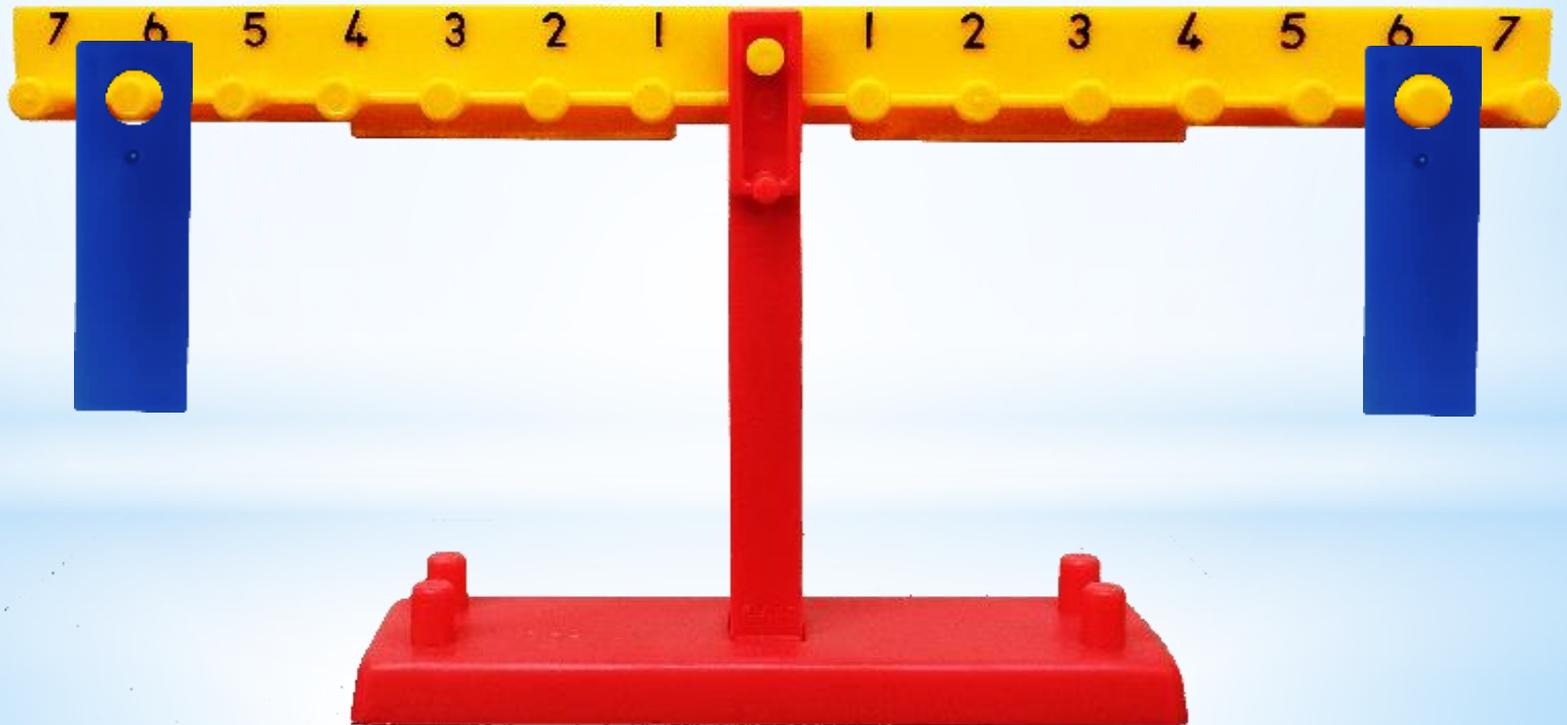
A Balança está em equilíbrio na posição horizontal

- Qual soma você acha que esta configuração representa?

Balança Matemática

Equações.

- O símbolo “=” entre duas quantidades numa expressão matemática, indica que a quantidade de um lado é equivalente à quantidade do outro lado, ambas são iguais, têm o mesmo valor. Expressões contendo “=” são chamadas equações.



- Nesse caso, a balança indica $6 = 6$.

Balança Matemática

Inequações.

- Enquanto equações possuem uma igualdade entre os termos de um lado e do outro, uma inequação possui uma desigualdade.
- Uma desigualdade pode ser representada pelos símbolos:

Menor que $<$; *Maior que* $>$; *Menor ou igual* \leq ; *Maior ou igual* \geq ;

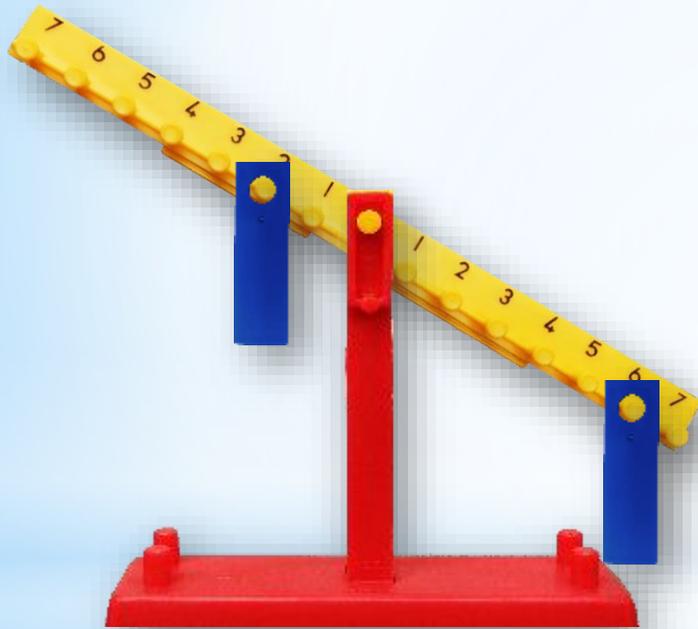
- No caso da balança focaremos nos dois primeiros. Esse tipo de desigualdade representa que quantidade do lado esquerdo será maior ($>$) ou menor ($<$) que a quantidade do lado direito do símbolo.
- Ex.: $E > D$, significa que a quantidade E é *MAIOR* que a quantidade D, como por exemplo $E = 5$ e $D = 4,3,2,1$ ou zero.
- Também, se E é *MAIOR* que D, quer dizer que D é *MENOR* que E, ou seja, podemos escrever ainda $D < E$.
- Na balança, uma desigualdade é observada quando a balança **NÃO** está alinhada. Nesse caso, o lado mais baixo é o maior valor, o lado mais alto é o menor .

Balança Matemática

Inequações.

- Alguns exemplos de desigualdades.

$$2 < 6 \text{ ou } 6 > 2$$



$$4 > 2 \text{ ou } 2 < 4$$



- Se olharmos para os símbolos **maior que**/**menor que** como uma seta, podemos perceber que a ponta da seta sempre aponta na direção do menor valor

Balança Matemática

Soma.

- Observe que em cada casa você pode colocar os pesos por um lado ou por outro, bem como colocar mais de um peso na mesma casa.

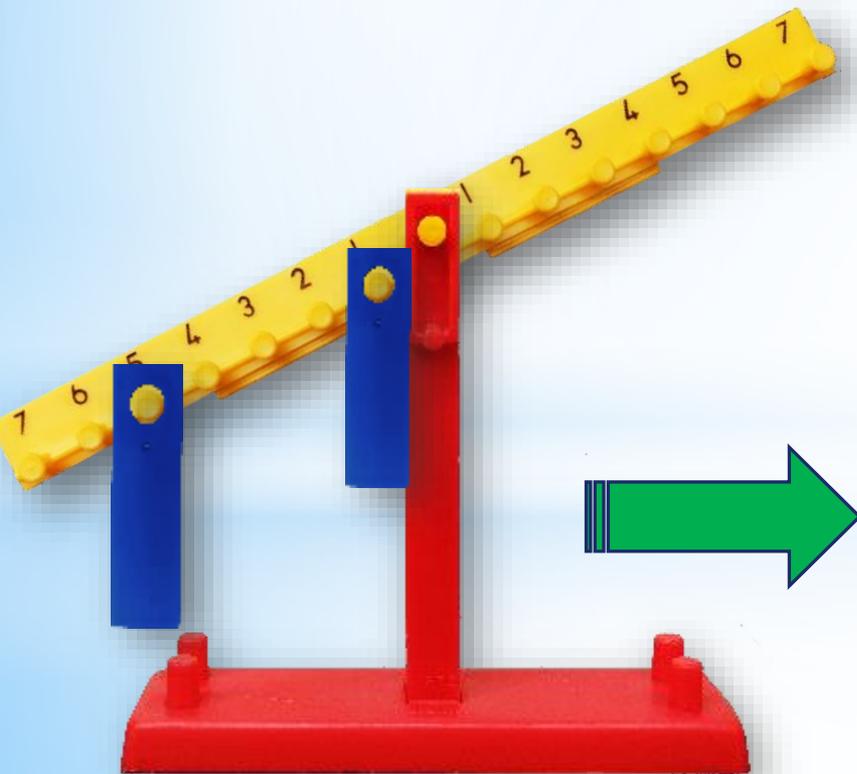


- Nesse caso, a balança indica $3 + 3 = 6$.

Balança Matemática

Soma.

- Para resolver somas ≤ 7 , como por exemplo: $5 + 1 = \underline{\quad}$; Coloca-se de um lado da balança, pesos nas posições 5 e 1 para corresponder aos números 5 e 1 da soma. Do outro lado você coloca um peso de modo a equilibrar a balança. Isso pode ser feito por tentativas.



Balança Matemática

Soma.

- Para somas ≥ 7 , como por exemplo: $8 + 6 = \underline{\quad}$; Coloca-se de um lado da balança, pesos nas casas 7&1 (para representar o 8) e 6. Do outro lado você coloca pesos de modo a equilibrar a na posição horizontal. Isso pode ser feito por tentativas. Uma solução seria dois pesos na casa 7, outra solução seria um peso na casa 10 e outro na casa 4, e assim por diante.

Balança não Alinhada,
ainda não resolvemos
a soma



Balança Alinhada, a soma está resolvida.

$$8 + 6 = 14$$



Balança Matemática

Soma.

- Para somas entre números negativos, como por exemplo: $(-3) + (-4) = \underline{\quad}$; Pode-se proceder normalmente como se fosse a soma $3 + 4$, no final a resposta deve ser considerada negativa, isto é, multiplica-se por (-1) .

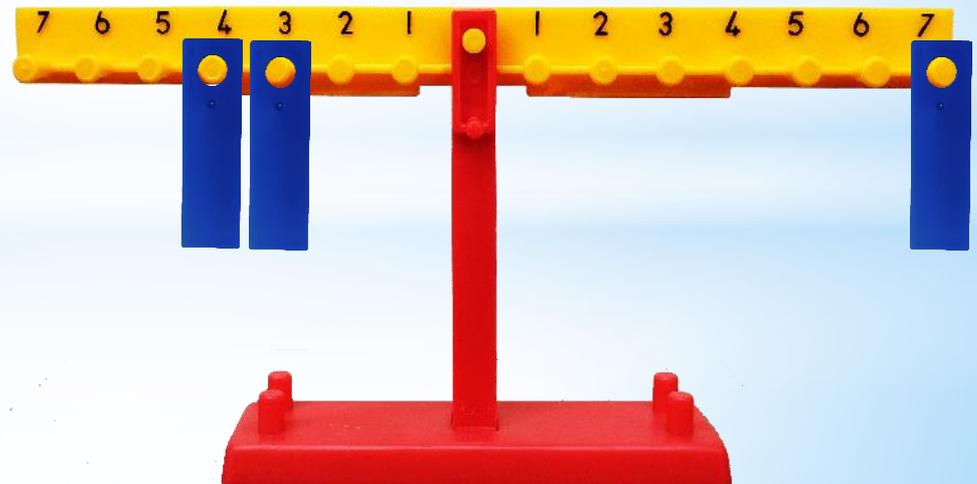
$$(-3) + (-4) = (-1)(3+4) = (-1)7 = -7$$

Balança não Alinhada,
ainda não resolvemos
a soma



Balança Alinhada, a soma está resolvida.

$$(-3) + (-4) = -7$$



Balança Matemática

Exercícios de Soma.

- Utilize a Balança Matemática para resolver as equações a seguir. Você pode colocar mais de um peso na mesma casa.

$2 + 12 = \underline{\quad};$

$10 + 4 - 2 = \underline{\quad};$

$9 + 3 + 3 = \underline{\quad};$

$4 + 5 + 6 = \underline{\quad};$

$18 + 3 = \underline{\quad};$

$8 + 9 + 10 = \underline{\quad};$

$1 - 2 + 3 = \underline{\quad};$

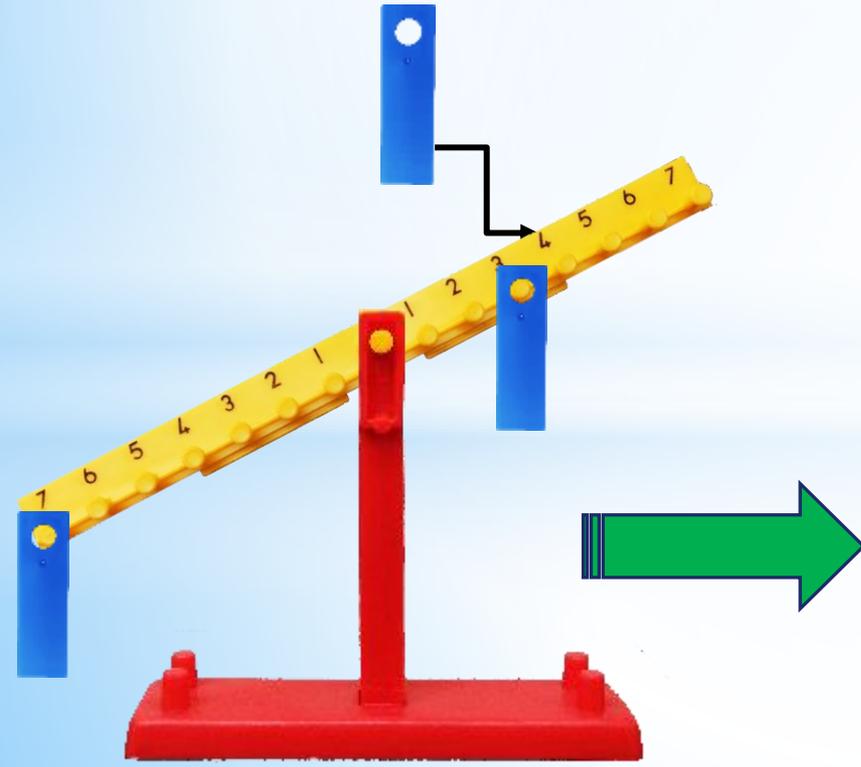
$11 + 6 = \underline{\quad};$

$7 - 1 - 1 = \underline{\quad};$

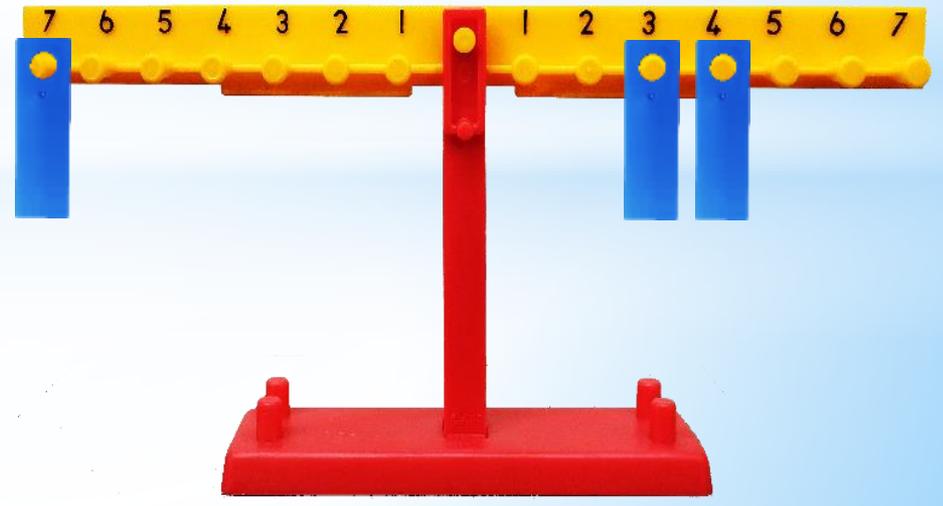
Balança Matemática

Subtração.

- Para resolver subtrações entre dois números, por exemplo, $7 - 3 = \underline{\quad}$; De um lado coloca-se um peso na posição 7 e do outro, um peso na posição 3 (O que você acha que ocorrerá?).
- Um dos lados irá abaixar e o outro irá subir. No lado que subiu, acrescenta-se pesos até a balança equilibrar, achando então a solução.



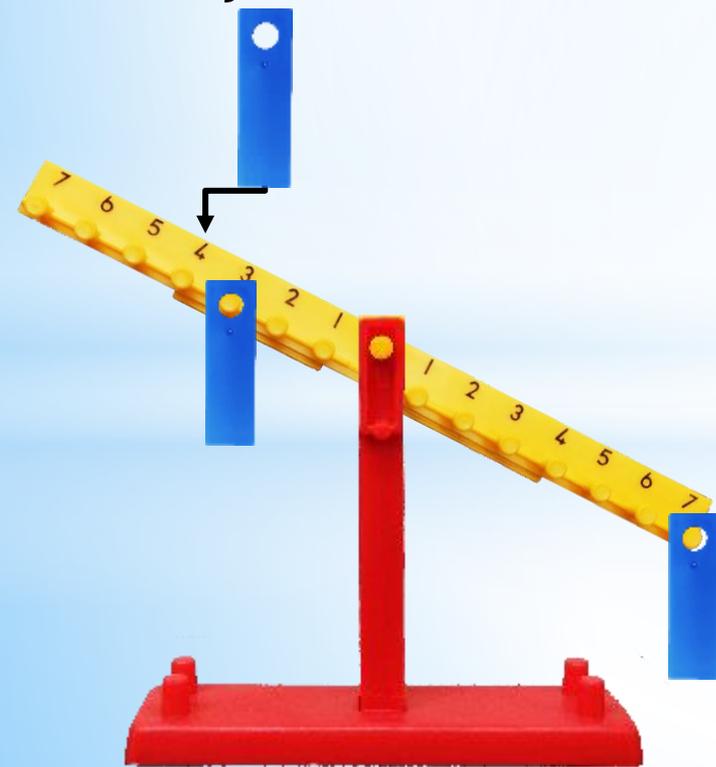
Aqui, adicionando-se um peso na **casa 4** a balança entra em **equilíbrio**, logo $7 - 3 = 4$.



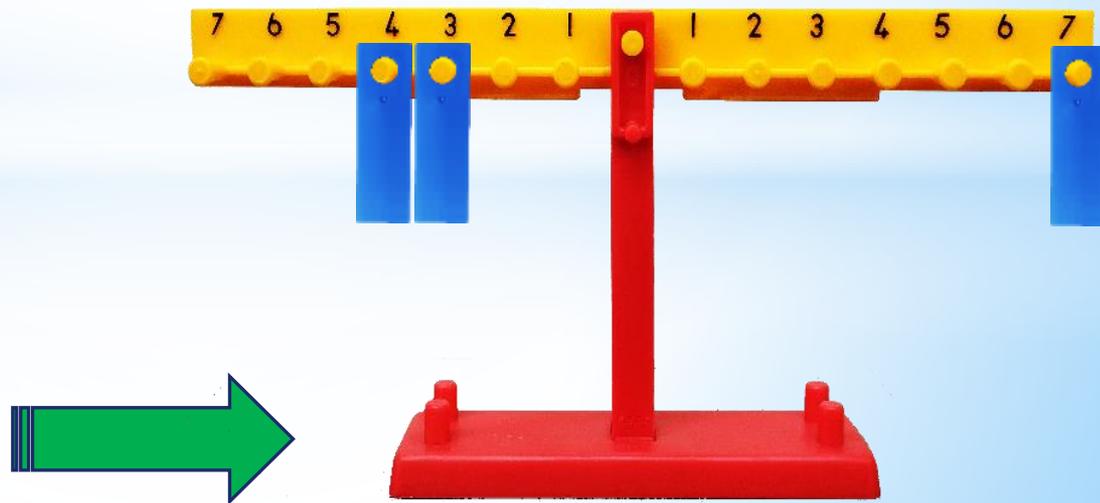
Balança Matemática

Subtração.

- Para resolver subtrações com resultado negativo, por exemplo, $3 - 7 = \underline{\quad}$; De um lado coloca-se um peso na posição 3 e do outro, um peso na posição 7. Um dos lados irá abaixar e o outro irá subir. No lado que subiu, acrescenta-se pesos até a balança equilibrar,
- A solução deve então ser considerada negativa: $4 \rightarrow -4$.



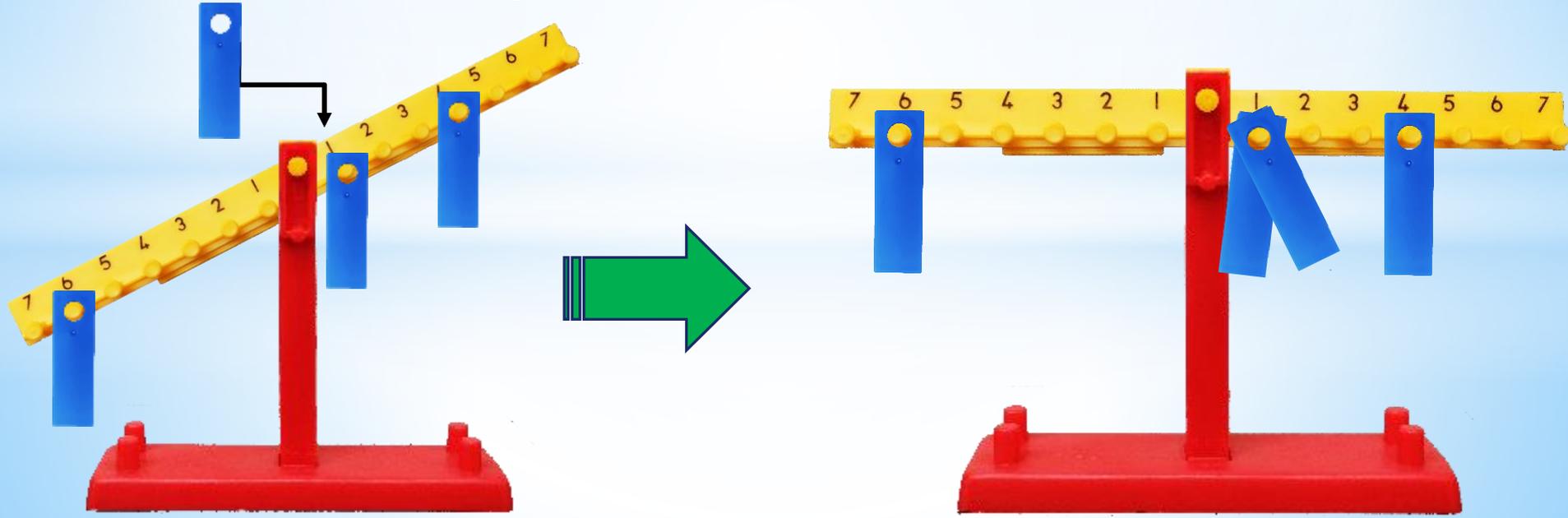
Aqui, adicionando-se um peso na **casa 4** a balança entra em **equilíbrio**, logo $3 - 7 = -4$.



Balança Matemática

Subtração.

- Para resolver subtrações entre 3 números, por exemplo, $6 - 4 - 1 = \underline{\quad}$; De um lado colocam-se pesos na casa 6 (Termo positivo) e do outro, um peso na posição 4 e outro na posição 1 (Termos negativos e positivos ficam de lados opostos).
- No lado que subiu, acrescenta-se pesos até a balança equilibrar, achando então a solução. Aqui, ao se colocar um outro peso na casa 1 a balança entrará em equilíbrio, logo, $6 - 4 - 1 = 1$.



Balança Matemática

Exercícios de Subtração.

- Utilize a Balança Matemática para resolver as equações a seguir. (Zero também é resposta válida)

- $12 - 2 = \underline{\quad}$; $10 - 4 - 2 = \underline{\quad}$; $9 - 3 - 2 - 1 = \underline{\quad}$;

- $14 - 3 - 6 = \underline{\quad}$; $18 - 3 = \underline{\quad}$; $18 - 9 - 2 = \underline{\quad}$;

- $17 - 12 = \underline{\quad}$; $20 - 7 = \underline{\quad}$; $3 - 2 - 1 = \underline{\quad}$;

Balança Matemática

Multiplicação

- A multiplicação, na realidade, é também uma soma, quando se considera por exemplo, 3×4 , é equivalente a considerar o número 3 sendo somado a si mesmo quatro vezes ou o número 4 sendo somado a si mesmo três vezes, isto é:
- $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ ou ainda, $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$.
- Observe que a ordem dos fatores não importa, 5×2 é a mesma quantidade que 2×5 .
- Na balança, a operação multiplicativa pode ser feita ao se colocar mais de um peso na mesma casa. Se de um lado da balança forem colocados 5 pesos na casa 6, isso representa a quantidade 5×6 , o outro lado irá ficar alinhado ao se colocar 3 pesos na casa 10, o que representa a quantidade 3×10 que é igual à 30. Assim, $5 \times 6 = 30$.

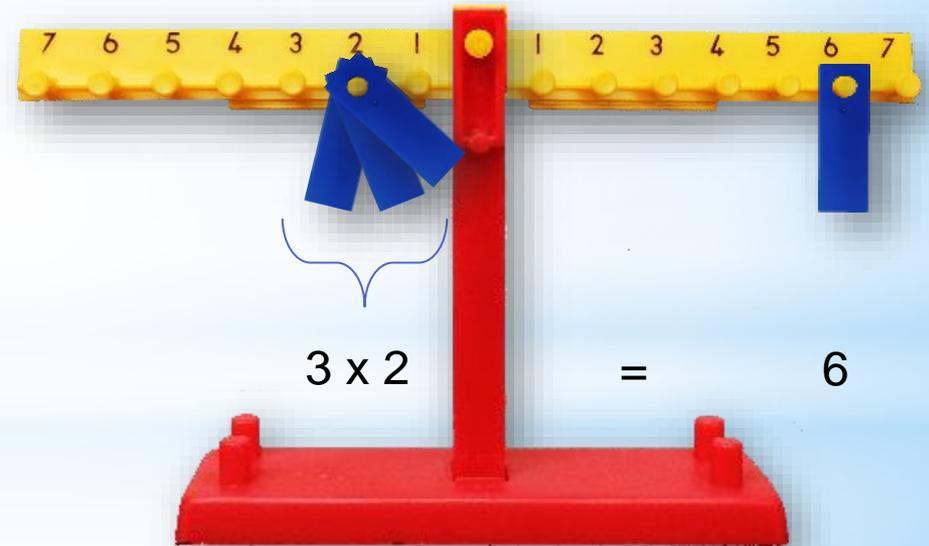
Balança Matemática

Exercícios de Multiplicação

- Para resolver $3 \times 2 = \underline{\quad}$; coloca-se 3 pesos na casa 2 de um lado da balança. Então, tenta-se colocar pesos do outro lado para que ela fique alinhada.



Também se poderia ter colocado 5 pesos na casa 3.



Aqui a leitura indica $3 \times 2 = 6$.

Balança Matemática

Exercícios de Multiplicação

- Utilize a Balança Matemática para resolver as seguintes equações:

- $4 \times 5 = \underline{\quad}$; $6 \times 3 = \underline{\quad}$; $7 \times 4 = \underline{\quad}$;

- $10 \times 3 = \underline{\quad}$; $0 \times 5 = \underline{\quad}$; $9 \times 1 = \underline{\quad}$;

- $8 \times 2 = \underline{\quad}$; $5 \times 4 = \underline{\quad}$; $4 \times 3 = \underline{\quad}$;

Balança Matemática

Resolvendo Equações do 1º grau

- Agora passaremos a tratar de equações contendo uma variável que queremos achar (Equações de primeiro grau) , essa variável é chamada incógnita e pode ser representada por um letra, como x ou y.

- Exemplos de equações de primeiro grau são:

$$4y + 6 = 10 ; \quad 3y - 2 = 4 ; \quad y + 3 = 5 ; \quad 5 + 2y = 15 ;$$

- Perceba que estas equações envolvem as operações que vimos até aqui com adição de uma variável denominada y.

- O termo $4y$ na primeira equação por exemplo, significa 4 vezes y , sendo y algum número que torne a equação verdadeira, isto é, y é um número que ao ser multiplicado por quatro e em seguida somado mais 6 resulta no número 10. Perceba que $y = 1$ resolve a equação, isto é, $4 \times 1 + 6$ é igual a 10.

Balança Matemática

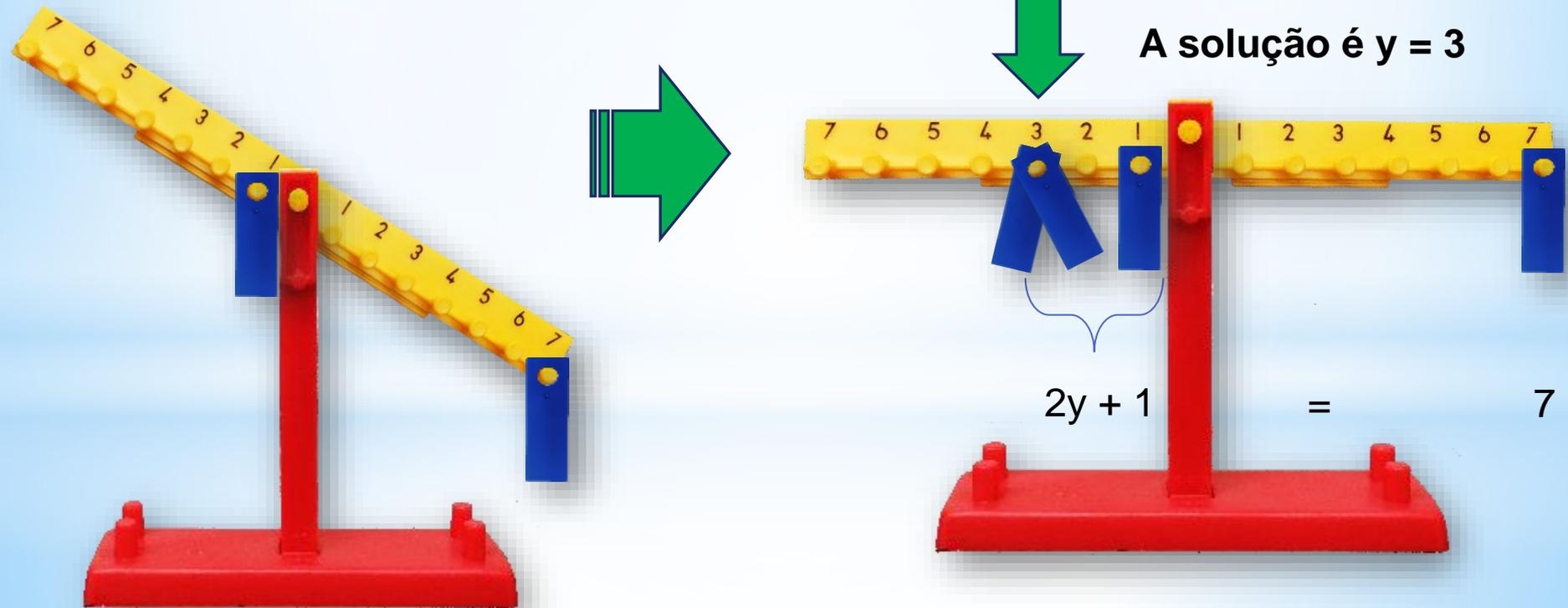
Resolvendo Equações do 1º grau

- Para resolver $y + 5 = 7$ montamos a balança da seguinte forma:
- Cada lado da igualdade pode ser visto com um lado do braço da balança, assim, de um lado teremos o peso da casa y e o da casa 5, enquanto do outro lado teremos o peso na casa 7.
- Começamos por colocar o peso da casa 5 do lado esquerdo por exemplo um lado e o na casa 7 do outro lado, de modo que balança ficará inclinada. Agora, precisamos adicionar um peso em alguma casa para que a balança fique alinhada, essa posição será o valor que estamos querendo descobrir ($y = 2$).
- Se tivéssemos $2y + 5 = 7$, teríamos agora que adicionar dois pesos em uma posição que balanceie o peso da casa 7 do outro lado ($y = 1$).

Balança Matemática

Resolvendo Equações do 1º grau

- Como exemplo vamos resolver $2y + 1 = 7$; Começamos com um peso na casa 1 de um lado e um peso na casa 7 do outro lado. Então, precisamos adicionar dois pesos numa determinada casa y , para a balança se alinhar (Do mesmo lado do peso da casa 1).



Balança Matemática

Resolvendo Equações do 1º grau

- Resolva as seguintes equações (encontrar o valor de y), utilizando a balança:

$$4y + 4 = 8 ; \quad 2y - 2 = 4 ; \quad y + 3 = 5 ; \quad y + 10 = 15 ;$$

$$3y + 2 = 11 ; \quad 5y - 2 = 8 ; \quad y + 1 = 13 ; \quad 5 + 2y = 13 ;$$

Balança Matemática

Manipulando Equações do 1º grau

- A Balança Matemática também ajuda a entender como se fazer pequenas manipulações em equações simples, como multiplicar a equação por um fator, somar ou subtrair a mesma quantidade dos dois lados, passar termos para um lado ou outro da igualdade e operações similares.
- Para que possamos manipular uma equação, precisamos tomar certos cuidados para preservar a igualdade.
- Se você começar com alguma igualdade na balança e quiser acrescentar ou retirar pesos preservando a igualdade (a balança continuará alinhada), você terá que fazer a operação nos dois lados da balança.
- Isso significa que se de um lado for acrescentado um peso numa determinada posição, teremos que adicioná-lo também do outro lado, na mesma casa. Fazendo isso a balança permanecerá alinhada, logo ainda temos uma igualdade entre quantidades.

Balança Matemática

Manipulando Equações do 1º grau

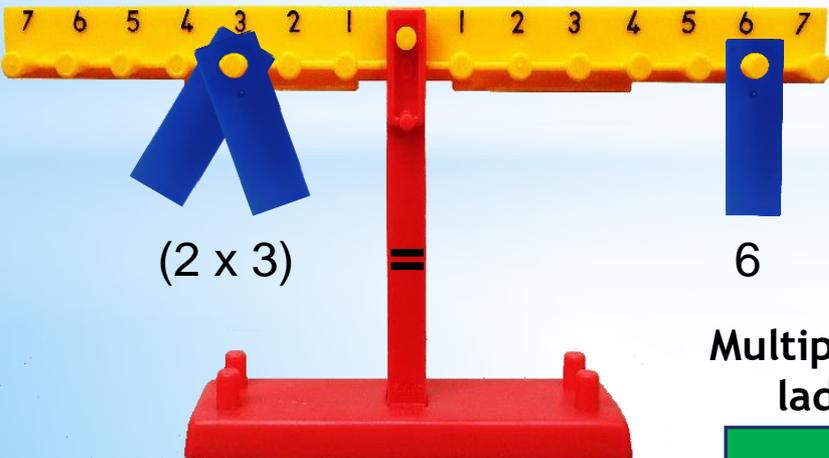
- Começando com uma igualdade qualquer, por exemplo, $2 \times 3 = 6$;
- Se quisermos somar algum valor à esta equação, por exemplo 5, temos que fazer dos dois lados da igualdade:
- $(2 \times 3) + 5 = 6 + 5$. Perceba que somamos 5 dos dois lados, fazendo dessa forma, a equação continua verdadeira.
- Na balança isso equivale a adicionar um peso na casa 5 em ambos os lados, no final ela permanecerá alinhada.



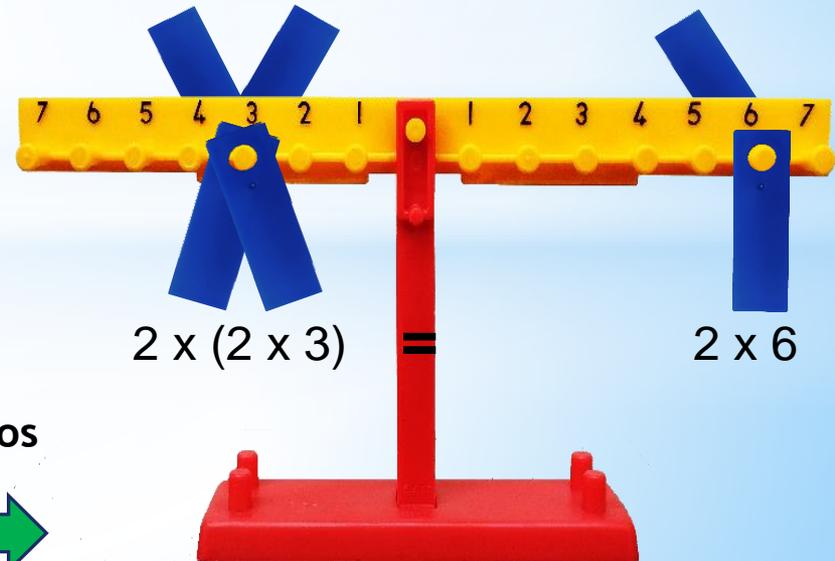
Balança Matemática

Manipulando Equações do 1º grau

- Ainda no mesmo exemplo, $2 \times 3 = 6$; Vamos multiplicar esta equação por algum fator.
- Se quisermos multiplicar a equação por 2, temos que fazer dos dois lados da igualdade como antes:
- $2 \times (2 \times 3) = 2 \times 6$. Perceba que multiplicarmos por 2 dos dois lados para preservar a igualdade.
- Na balança isso equivale a repetir os pesos que já estão, mas agora na parte de trás do braço, conforme a figura.



Multiplicando ambos
lados por dois



Dicas Fractal

Brincando com equações

- Explore as funções da Balança Matemática até sentir que entendeu os conceitos, procure sempre encontrar a lógica, pois na matemática sempre há uma razão para tudo.
- Ao terminar de usar a balança, guarde-a novamente na embalagem e na caixa, assim como todas as peças. Ela é feita de material resistente, tomando as devidas precauções, a balança terá tempo de vida indeterminado.
- Divirta-se aprendendo conceitos básicos de matemática, você entenderá ideias que serão muito úteis posteriormente.
- Você também pode propor suas próprias equações e aprender a resolvê-las na balança. Aprenda matemática se divertindo!

Bons Cálculos!

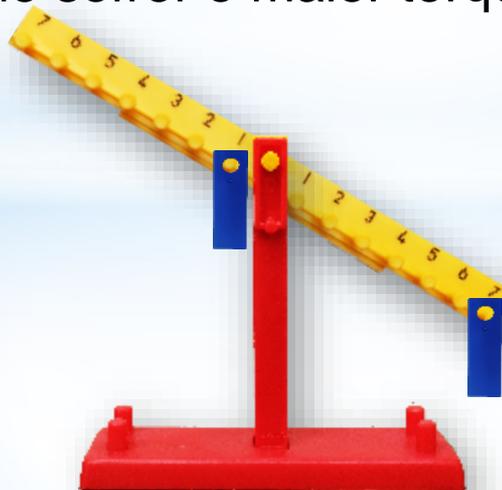
Parte Destinada ao Professor

Princípio físico de funcionamento da balança

Balança Matemática

Princípio de funcionamento

- Agora, iremos entender o funcionamento da balança, por qual motivo ela funciona?
- O princípio de funcionamento da balança se resume ao torque que a gravidade terrestre exerce em cada um dos lados da balança.
- Torque é uma grandeza física que tem a ver com rotação em torno de algum eixo. No caso da balança, os braços são livres para girar executando movimento de gangorra. Ambos giram em torno do centro do corpo.
- O lado da balança que sofrer o maior torque será o que ficará para baixo.



Torque gravitacional do lado direito é maior que o torque do lado esquerdo

Balança Matemática

Princípio de funcionamento

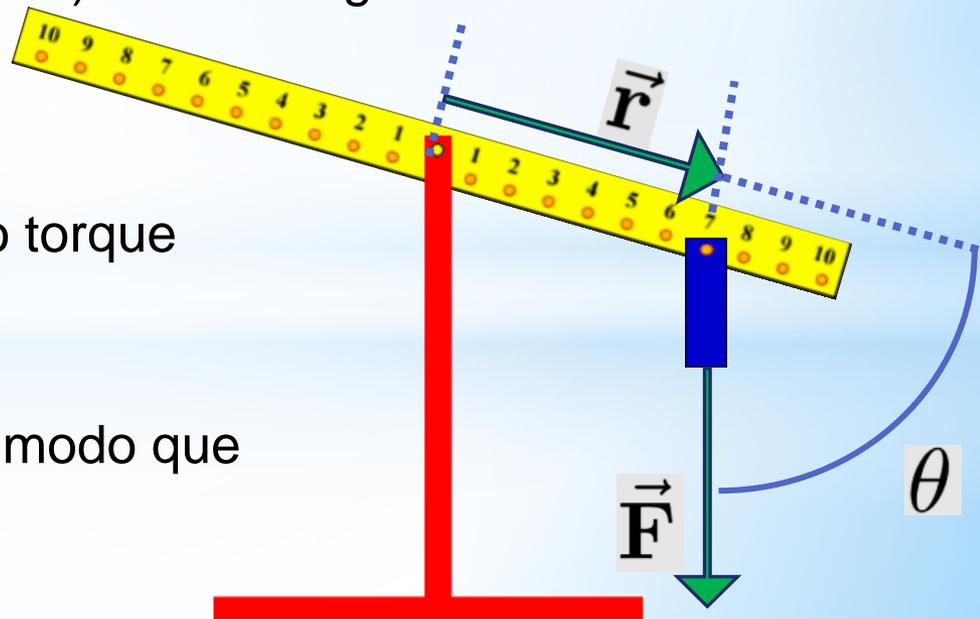
- Uma expressão simples para o torque é:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| |\vec{F}| \text{sen}\theta$$

Onde r é a distância do eixo de rotação até o peso (aqui, pode representar o número da casa onde está o peso. Em realidade r tem unidade de comprimento, como metro, centímetro, etc.). F representa a força gravitacional ($F = mg$, g é a aceleração da gravidade) e θ é o ângulo entre r e F .

- A condição de equilíbrio é que o torque do lado esquerdo seja igual ao torque do lado direito. Isto é $T_E = T_D$.

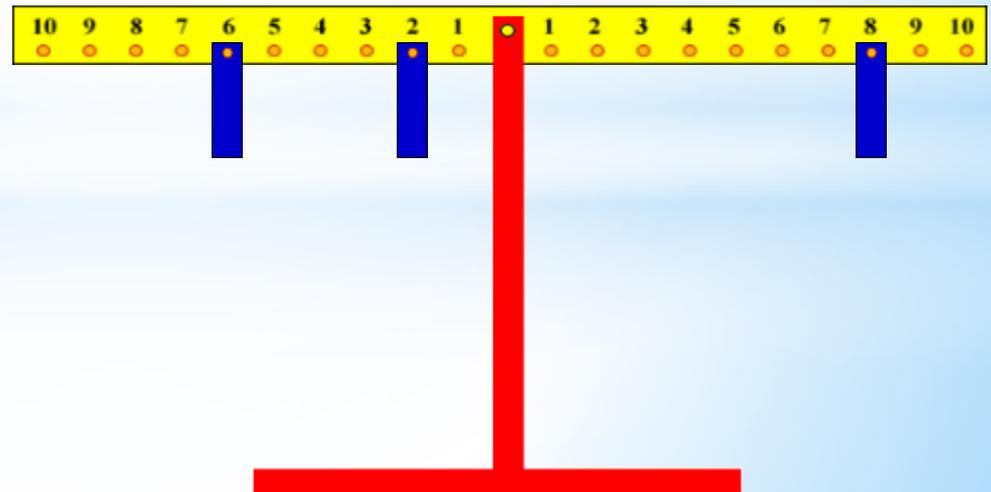
Além disso, no equilíbrio, $\theta = \pi/2$, de modo que $\text{sen}\theta = 1$ para todos os corpos.



Balança Matemática

Princípio de funcionamento

- Cada peso adicionado na balança irá contribuir com um torque. Por exemplo, para uma igualdade como $2 + 6 = 8$, iremos entender como funcionam os cálculos.
- O equilíbrio é atingido quando o torque do lado esquerdo se iguala em módulo ao torque do lado direito: $T_E = T_D$;
- O torque do lado esquerdo é devido aos dois pesos, um na casa 2 e outro na casa 6 ($T_E = T_{E6} + T_{E2}$). Enquanto o torque do lado direito é devido apenas ao peso da casa 8 ($T_D = T_{D8}$).



Balança Matemática

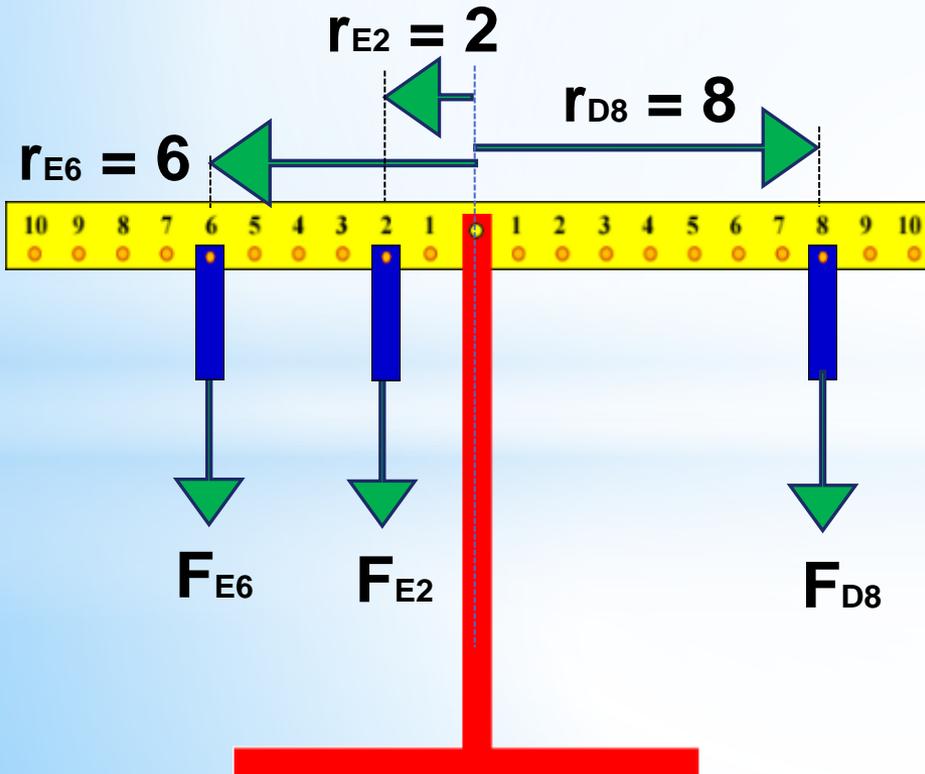
Princípio de funcionamento

- Dessa forma, no equilíbrio, com $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ficaremos com:

- $T_E = r_{E6}F_{E6} + r_{E2}F_{E2}$; (Torque do lado esquerdo)

com $\sin\theta_E = \sin\theta_D = 1$, para todas as massas.

- $T_D = r_{D8}F_{D8}$; (Torque do lado direito)



Igualando as duas expressões:

$$r_{E6}F_{E6} + r_{E2}F_{E2} = r_{D8}F_{D8}$$

Como os pesos azuis são todos iguais, a força gravitacional em cada um

é a mesma, igual à sua massa multiplicada pela aceleração da gravidade local.

Balança Matemática

Princípio de funcionamento

Considerando a mesma força gravitacional para cada peso e com a expressão:

$$r_{E6}F_{E6} + r_{E6}F_{E6} = r_{D8}F_{D8} ;$$

$$6mg + 2mg = 8mg ;$$

$$\cancel{6mg} + \cancel{2mg} = \cancel{8mg} ;$$

- * As massas podem ser anuladas (pois são iguais) e a aceleração gravitacional também, o que quer dizer que a Balança Matemática fornece resultados corretos em qualquer planeta do universo!
- Agora, com as massas e a aceleração da gravidade fora da equação, podemos perceber a soma que está acontecendo:

$6 + 2 = 8$; Logo, o motivo de as contas darem certo é devido ao fato de os pesos serem todos iguais, de mesma massa.

Balança Matemática

Princípio de funcionamento

- Assim, generalizando os cálculos anteriores, chegamos na equação que governa o funcionamento da balança:

$$\sum_{\text{Esquerdo},i} m_i r_i \sin\theta_E = \sum_{\text{Direito},j} m_j r_j \sin\theta_D$$

Lei da Balança Matemática

- No equilíbrio todos os ângulos são iguais ($\pi/2$), resultando em:

$$\sum_{\text{Esquerdo},i} m_i r_i = \sum_{\text{Direito},j} m_j r_j$$

No caso da Balança, todas as massas são iguais ($m_i = m_j$).

Balança Matemática

Princípio de funcionamento

- De modo que no nosso caso, essa é a equação final que nos dá os resultados desejados:

$$\sum_{\text{Esquerdo},i} r_i = \sum_{\text{Direito},j} r_j$$

Balança Matemática em equilíbrio